Повторяем тему «Применение производной»

 В одном из заданий (№ 6) профильного уровня ЕГЭ по математике и в базовом уровне (№ 14) наряду с типами заданий «Производная и касательная, геометрический смысл касательной», «Физический смысл производной», «Первообразная. Площади криволинейных трапеций» даются задания на применение производной к исследованию функций по данным графика.
 В таких заданиях частые ошибки состоят в том, что, анализируя график производной, обучающиеся путают его с графиком самой функции (и наоборот).

 Чтобы добиться лучшего понимания взаимосвязи между графиком функции и графиком ее производной, можно одновременно рассматривать и сравнивать эти графики.

 Например, к концу 10-го класса обучающиеся уже могут исследовать функцию и строить ее график. Построим график функции y=3x5 - 5x3 + 2.

D(y) = R. Функция не является ни четной, ни нечетной. График пересекается с осью ОУ (если х=0) в точке (0; 0). Чтобы найти точки пересечения с осью ОХ, надо решить уравнение 3x5 - 5x3 + 2=0. Один из корней этого уравнения находим подбором (х=1), другие корни могут быть найдены только приближенно.

Найдем производную функции:

у' = 15х4 – 15х2.

D(y') = R, поэтому критических точек, для которых у' не существует, нет.

15х4 – 15х2 = 0

х1 = 0, х2 = -1, х3 = 1.

 Рис. 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | (-∞; -1) | -1 | (-1; 0) | 0 | (0; 1) | 1 | (1; +∞) |
| у' | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + |
| у | возрастает | 4 | убывает | 2 | убывает | 0 | возрастает |
|  |  | max |  |  |  | min |  |

Строим график функции (рис. 1).

 Построим график функции f(x) = 15х4 – 15х2.

D(f) = R. Функция является четной. График пересекается с осью ОУ (если х=0) в точке (0; 0). Чтобы найти точки пересечения с осью ОХ, надо решить уравнений 15х4 – 15х2=0.

х1 = 0, х2 = -1, х3 = 1.

Найдем производную функции:

f'(х) = (15х4 – 15х2)' = 60х3 – 30х

D(f') = R, поэтому критических точек, для которых f' не существует, нет.

60х3 – 30х = 0

х1 = 0, х2 = -$ \frac{\sqrt{2}}{2}$, х3 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

 Рис. 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | (-∞; -$\frac{\sqrt{2}}{2}$) | -$\frac{\sqrt{2}}{2}$, | (-$\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0) | 0 | (0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$) | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | ($\frac{\sqrt{2}}{2}$,; +∞) |
| у' | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| у | убывает | -3,75 | возрастает | 0 | убывает | -3,75 | возрастает |
|  |  | min |  | max |  | min |  |

Строим график функции (рис. 2).

Рассматриваем, сравниваем график функции и график ее производной:



Отвечаем на вопросы:

1. На рисунке изображен график производной функции. Найдите точку максимума (минимума) функции у=f(x) (смотрим на график производной функции и проверяем по графику функции).

2. На рисунке изображен график функции у=f(x). Найдите точки, в которых производная равна нулю.

3. На рисунке изображен график производной функции. Найдите промежутки возрастания функции у=f(x).

4. На рисунке изображен график производной функции. Найдите длину промежутка убывания функции у=f(x).

5. На рисунке изображен график функции. В какой точке производная меняет знак с «+» на «-» (с «-» на «+»)?

6. Как ведёт себя график производной функции в точке перегиба графика функции?

7. На рисунке изображен график производной функции. Найдите сумму точек функции, в которых касательная к нему параллельна оси ОХ?

 Сравнивая графики функции и её производной, можно повысить уровень теоретической подготовки обучающихся по теме «Производная»: поиск промежутков убывания и возрастания функции, поиск максимума и минимума функции, поиск промежутков выпуклости и вогнутости функции, поиск точек перегиба функции, геометрический смысл производной. Необходимо напоминать обучающимся, что при решении задач подобного вида следует внимательно читать условие и отмечать, что на чертеже изображен либо график функции, либо график её производной.